モンティ・ホール問題にかんするノート[1]

浜田宏

問題：あるテレビ番組の司会者（モンティ・ホール）が 3 つの扉 A，B，C の中のひとつに賞品を隠した．賞品がどこに隠されているかを言い当てると，あなたは賞品がもらえる．あなたが A の扉を選ぶと，司会者は扉 B がハズレであることを示し「今なら選択を変えてもいいですよ」と提案してきた．あなたは選択を変えるべきか？[2]

これは，アメリカのテレビ番組『Let’s make a deal』でのやりとりの一部です．司会者の名をとって，現在では『モンティ・ホール問題』として広く知られています．なぜ有名かというと,「ある仮定の下では選択を変えると賞品を当てる確率が上昇する」という直感に反する結論が得られるからです．ただし重要なのは結論ではありません．一体どういう《仮定》ならば，C 扉に変えることでアタリ確率が上昇するのか？　という理屈の部分です．

解答者になにも情報がないとき，各扉のアタリ確率は

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$$

と仮定するのが自然でしょう．

直感的に考えれば，A と C に賞品が入っている確率は半々だから，選択を変える誘因はありません．しかし特定条件下でベイズの定理を適用すれば，司会者からの情報を受けた後，A に賞品が入っている事後確率は 1/3 で，C に賞品が入っている事後確率は 2/3 に変化します．

なぜこのような直感に反する事後確率が出てくるのでしょうか？ 以下，この問題について簡単に解説します[3]

まず次の二つを定義します．

[1] ver.1.0.0 (2015 年 5 月 20 日); ver. 1.0.1 (2016 年 7 月 4 日改訂); ver. 1.0.2 (2016 年 8 月 1 日改訂)

[2] Selvin (1975a) は, Let’s Make a Deal における選択では, 扉を変えた場合のアタリ確率が 2/3 であることを,《場合分け表》に基づいて解説しています．この論文がおそらく “The Monty Hall Problem” という語を，最初に用いた論文です．Selvin は,《場合分け表》を示しただけでなく，条件付き確率の計算によって，扉を変更しない場合には確率が 1/3 で，変更した場合に 2/3 になることを示しています (Selvin 1975b).

それからしばらく後に 1990 年 Parede 誌のコラム “Ask Marilyn”で Marilyn vos Savant（学者ではなく女性コラムニスト, IQ が非常に高いことで有名）が読者の質問に答える形で扉を変えるべきだと主張したところ,「間違っている」という反応が多数よせられました．その中にはプロの数学者・統計学者も含まれていたそうです (Rosenthal 2005)．モンティ・ホール問題はヴォス・サバントのコラムがきっかけで再び注目されました (Rosenthal 2005).

[3] 以下の解説の途中部分までは, 河野による「三囚人のジレンマ」の解説に基づきます（河野 1999）. 三囚人のジレンマは本質的にはモンティ・ホール問題と同型です．事前分布が一様分でないケースの解説については市川 (1998) の研究に基づきます．市川 (1998) によれば三囚人のジレンマは 1950 年頃から知られている作者不明の問題です．刊行物としてはマーティン・ガードナーが 1959 年に雑誌で発表したコラムが（おそらく）最初でしょう．

定義 (有限加法性)**.** 各事象 A_i が相互に排反なとき，次が成立します．

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

定義 (条件付き確率)**.** 事象 A が起こったという条件のもとで事象 G が起こる確率（条件付き確率）は

$$P(G|A) = \frac{P(G \cap A)}{P(A)}$$

です．

なお 両辺に $P(A)$ をかけて，条件付き確率の表現を変えると

$$P(G|A)P(A) = P(G \cap A)$$

です．

記号 A, B, C をそれぞれ扉 A,B,C に賞品が隠されている事象とします．例えば記号 $P(A)$ は扉 A の当たり確率を表しています．事象 A, B, C は相互に排反，すなわち

$$A \cap B = \emptyset, B \cap C = \emptyset, A \cap C = \emptyset$$

と定義します．この意味は,「賞品は扉 A,B,C のうち，どこか一枚に隠されている」です．すると全事象 Ω は $\Omega = A \cup B \cup C$ と書ける．また各事象 A, B, C が生じる事前確率は

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$$

と仮定します．事象 b を「司会者が扉 B はハズレだと教えること」と定義します．事象 b が生じる確率を

$$\begin{aligned}
P(b) &= P(b \cap \Omega) \\
&= P(b \cap (A \cup B \cup C)) \\
&= P((b \cap A) \cup (b \cap B) \cup (b \cap C)) \quad \text{分配則} \\
&= P(b \cap A) + P(b \cap B) + P(b \cap C) \quad \text{有限加法性}
\end{aligned}$$

と表せます．

以上の定義をもとに，モンティ・ホール問題の事後確率を計算してみましょう．

ベイズの定理

「司会者から扉 B がハズレだと知らされた後に，扉 A が当たりである確率」は条件付き確率 $P(A|b)$ であらわせます．

$$\begin{aligned}
P(A|b) &= \frac{P(A \cap b)}{P(b)} = \frac{P(b \cap A)}{P(b)} && A \text{ と } b \text{ を入替} \\
&= \frac{P(b|A)P(A)}{P(b \cap A) + P(b \cap B) + P(b \cap C)} && \text{上の変形を用いた} \\
&= \frac{P(b|A)P(A)}{P(b|A)P(A) + P(b|B)P(B) + P(b|C)P(C)} && \text{条件付確率の定義}
\end{aligned}$$

これをベイズの定理といいます．ここでは定理が天下り式に導入されたのではなく，条件付き確率の変形によって証明が与えられたことに注意します．このとき $P(b|A)$ と $P(b|B)$ と $P(b|C)$ をそれぞれ次のように仮定しています．

まず $P(b|A)$ つまり「A が当たりの時，司会者が B はハズレと教える確率」です．ここでは，司会者は B がハズレだと教えてもよいし，C がハズレだと教えてもよい，どちらを選ぶかは半々だと仮定します．よって

$$P(b|A) = 1/2$$

です．

次に $P(b|B)$ ですが，B が当たりの時に，B がハズレとは言えないので

$$P(b|B) = 0$$

です．

次に $P(b|C)$ ですが，C が当たりならば A か B がハズレなのですが，司会者はあなたが選んだ A がハズレとは教えないと仮定します[4]．この「司会者はヒントを与える前に，いきなり解答者が選んだドアの当たりハズレを教えない」という点が重要です．ということは C が当たりである以上，司会者は「B がハズレ」と言うしかありません，よって

$$P(b|C) = 1$$

です．これらを代入すれば

$$\begin{aligned} P(A|b) &= \frac{P(b|A)P(A)}{P(b|A)P(A) + P(b|B)P(B) + P(b|C)P(C)} \\ &= \frac{(1/2)(1/3)}{(1/2)(1/3) + (0)(1/3) + (1)(1/3)} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

です．一方,「司会者から扉 B がハズレだと知らされた後での，扉 C が当たりである確率」は条件付き確率 $P(C|b)$ であらわせます．先ほどと同様にベイズの定理を用いて計算すると

$$\begin{aligned} P(C|b) &= \frac{P(b|C)P(C)}{P(b|A)P(A) + P(b|B)P(B) + P(b|C)P(C)} \\ &= \frac{(1)(1/3)}{(1/2)(1/3) + (0)(1/3) + (1)(1/3)} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

です．

つまり

$$\frac{1}{3} = P(A|b) < P(C|b) = \frac{2}{3}$$

だから，扉 C に変えた方が当たり確率が高くなると結論できます．

ここに「司会者が A はハズレだと教えない」という仮定の重要さがあります．もしこの仮定がなければどうなるでしょうか？「司会者が A はハズレだと教えない」という条件がなければ

$$P(b|A) = 1/2, P(b|B) = 0$$

[4]もちろん，ハズレを教えてくれると仮定することも可能です．そのように仮定すると当然結論は変化します．

は変わりませんが,「C がアタリのとき，B がハズレだと言う確率」は半々なので

$$P(b|C) = 1/2$$

と仮定するのが自然です[5]．この場合は

$$P(A|b) = \frac{(1/2)(1/3)}{(1/2)(1/3) + (0)(1/3) + (1/2)(1/3)} = \frac{1}{2}$$
$$P(C|b) = \frac{(1/2)(1/3)}{(1/2)(1/3) + (0)(1/3) + (1/2)(1/3)} = \frac{1}{2}$$

だから直感通りの解となります[6].

ここまでの話を簡単に振り返っておきましょう．モンティ・ホール問題は難しい問題です．ではその難しさの本質はどこにあるのでしょうか？

第一に「仮定がなんであるか」が必ずしも明確でないことです．特に司会者のヒントについては，注意が必要です．その解釈によって結論が全く異なるからです.

第二に，われわれはややこしい計算を避けようとする傾向を持っていることです．残った場合の数が 2 だから，当たりは 2 つに 1 つだという直感は分かりやすく，強力です．だから私たちはこの単純な推論に飛びつきがちです．しかしその推論と，仮定を明確にした場合の計算結果は一致しないのです.

上述の計算は，通常は頭の中ではできないので，紙に書いてゆっくりと計算すべきです.

これはとても大切なことなので, あらためて**強調**しておきましょう．数学的論証が分からない場合はとにかく紙に書くことをお勧めします．世の中には紙に書いて計算しなければ絶対に分からないことが存在します（「絶対」は言い過ぎかもしれませんが，ほとんど絶望的なまでに難しくなります）．3 桁のかけ算を暗算で出来る人はごく少数ですが，紙に書けばそのくらいの計算は小学生でもできます．紙に書いて計算することの重要性を軽んじてはいけません．あなたがどれだけ知的な人間であろうと，頭の中だけで実行する計算は, 紙を使った小学生の計算にしばしば劣ります．そのことを理解しなくてはいけません[7].

モンティ・ホール問題の仮定を再確認しておきましょう.

- 事前確率は $P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$ です.
- あなたの選んだ扉がハズレだった場合，司会者はあなたの扉とは別のハズレのドアを開く.
- あなたの選んだ扉がアタリだった場合，司会者は残りの扉のうち, 一方をランダムに開く.

一方，この仮定が明示されていない場合（多くの場合明示されていない）,「司会者が B はハズレと言った」という情報だけからは，司会者の行動原理までは分かりません．だから,「司会者が

[5]このとき司会者は，あなたの最初の選択がハズレであることをわざわざ教えてくれる可能性があるので，有益なヒントを与えてくれる気がします．しかし，あなたが選択しなかったドアからハズレを一枚教えてくれる司会者のヒントのほうが，実はもっと有益なのです.

[6]前述したとおり，ここまでの説明は河野による解説 (河野 1999) に準じています

[7]ちなみに私は紙に書いて計算してもよく間違います．そのことを自覚しているので，紙で計算した後にさらに PC で確認します．紙に書いて計算すれば，少なくとも自分で分からないところが，鮮明になります.「どこが分からない」かを知っている状態は，ほとんど《分かっている》状態になりかけています．理解したい人はとにかく，いついかなるときも紙とペンを使って考えましょう.

当たりを教えてしまう可能性もあったが，たまたまハズレのヒントを教えた」と解釈する事もできます．

司会者がとった行動に矛盾しない規則にはいくつかのパタンがあり，少なくとも

1. あなたが選ばなかった扉のうち，一方をランダムに開ける
2. あなたが選ばなかった扉のうち，必ずハズレを開ける
3. あなたが選んだ扉を含めて，一つをランダムに開ける
4. あなたが選んだ扉を含めて，必ずハズレを一つ開ける

の四種類を考えることができます．標準的なモンティ・ホール問題で採用される仮定は 2 のパタンです．しかし最初から 2 だと断らない限り，1 でも 3 でも 4 でも間違いではないのです．

なぜなら「司会者は B がハズレと教えた」という観察事実には多様な解釈の可能性があるからです．観察した結果だけから，司会者の従う行動規則がどれであるかを正しく言い当てる事は（情報が不足しているために）不可能なのです．ですから何度も言うように，仮定がなんであるかは決定的に重要なのです．

したがってモンティ・ホール問題の事後確率は，採用する仮定によって変化します．われわれにとって自然な結果は，事後確率 $P(A|b), P(C|b)$ が共に 1/2 になることですが，これは

- 事前確率は $P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$ だ
- 司会者はあなたが選ばなかった扉のうち一つをランダムに開ける

という仮定のもとでのみ，正しいのです．その場合は，司会者がうっかりアタリを開けてしまう可能性もあったのです．

実は行動パタンが 1,3,4 の場合はいずれも，事後確率 $P(A|b), P(C|b)$ は $P(A|b) = P(C|b) = 1/2$ です（ただし途中の計算式は異なります）．

直感的理解

モンティ・ホール問題を直感的に理解する方法として次のような説明を考えることができます．

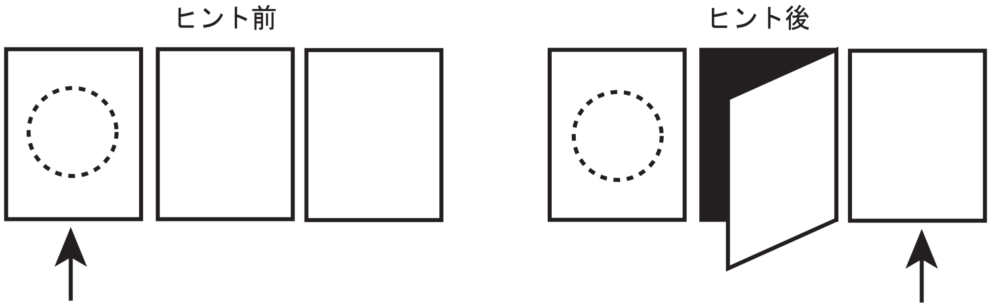

図 1: 最初の選択がアタリの場合

図 1 に示すように，左端のドアが実際にはアタリで，解答者が直感でアタリのドアを選んでいたと仮定します．司会者がハズレのうち一方（真ん中）をヒントとして開いたとしましょう（図 1

右）．次にヒントを見た解答者が，最初の選択（左）を変更して残ったドア（右）を選択したとしましょう．すると，そこは必ずハズレです．なぜなら司会者は解答者が最初にアタリを選択したことを知っているので，残ったハズレのドア（真ん中と右）からランダムに 1 枚開けるからです．残ったドアは必ずハズレです．

次に最初の選択がハズレだった場合を考えます．

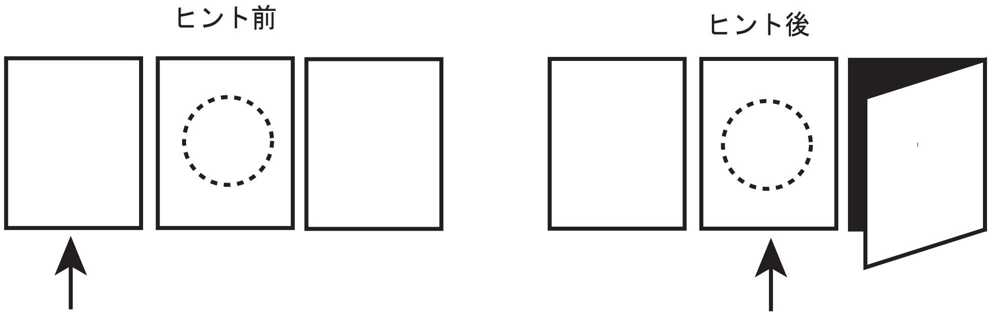

図 2: 最初の選択がハズレの場合

図 2 に示すように，真ん中のドアが実際にはアタリで，解答者は最初にハズレのドア（左）を選んだと仮定します．司会者は，解答者が最初に選択したドア（左）とアタリのドア（真ん中）はヒントとして開けることができないので，右のドアを開けることしかできません．このとき，解答者が最初の選択（左）を変更して残ったドア（真ん中）を選択すると，そこは必ずアタリです．

以上の考察をまとめてみると，

- 最初に選んだドアがたまたま正解だった場合は，ヒント後に選択を変えると必ずハズレ
- 最初に選んだドアがたまたまハズレだった場合は，ヒント後に選択を変えると必ずアタリ

が成立しています．つまり「ヒント後に選択を変えてアタリをひく確率」は「最初にたまたまハズレを選ぶ確率」に等しいのです．よって「最初にたまたまハズレを選ぶ確率」は 2/3 だから,「ヒント後に選択を変えてアタリをひく確率」も 2/3 です．

扉が増えるアナロジー

モンティ・ホール問題に対する解説の中には，選択肢の数を増やした例を考えれば簡単に理解できる，というタイプの説明があります．これは次のようなものです [8]．

扉が 100 個ある．あなたが一つの扉を選ぶと，司会者は残りの 99 の扉から注意深く 98 のハズレの扉を空ける．残った二つの扉のうち，あなたが最初に選んでいた扉と，司会者が残してくれた最後の扉とどちらがアタリの確率が高いだろうか？

[8] このアナロジーは実際にヴォス・サバントがコラムの中で用いています．彼女は 100 万枚の扉を仮定して，司会者が注意深くアタリを避けてドアを開けるところを想像すれば，理解しやすいだろうと説いています．なおヴォス・サバントにモンティ・ホール問題を質問した人（メリーランド州コロンビアの Craig F. Whitaker さん）はなかなかの慧眼だったといえるでしょう．

この例においては，司会者が 99 の扉からハズレの扉 98 枚を取り除く作業によって，アタリの確率が 1 枚の扉へと，凝縮されていくように感じられます．扉が増えることによって，ハズレをのぞくプロセスがより強調され，事後確率の変化がより直感的に感じられるでしょう．

あなたが最初に選んだ扉がアタリであれば，司会者の作業は事後確率に影響を及ぼしません．しかし，あなたの選んだ扉がたまたまアタリである確率は 1/100 に過ぎません．残りの 99/100 の確率で，あなたが選ばなかった扉のどこかにアタリがあるのです．そして司会者はその 99/100 という確率をたった一枚の扉へと凝縮してくれたと解釈できるでしょう [9].

一般化モンティ・ホール問題

ここまで考えてきた問題では，事前確率は

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$$

でした．しかし常に事前分布が一様分布だとは限りません．例えば過去の事例の観察から，

$$P(A) > P(B), P(A) > P(C)$$

であるようなケースもあるでしょう．このように事前確率から考えて A を選ぶことが有利な状況でも，やはり選択を変更すべきなのでしょうか？

このように問題を一般化して考える場合には，直感的ヒューリスティックに頼っていては正しい判断ができません．しかし確率論的に正しく定式化できていれば，問題の一般化は容易です．

命題 1 (モンティ・ホール問題で扉を変える条件)**.** モンティ・ホール問題が以下の条件を満たすと仮定します．

- 事象 A, B, C は条件
$$A \cap B = \emptyset, B \cap C = \emptyset, A \cap C = \emptyset$$
を満たす．
- あなたの選んだ扉 (A) がハズレだった場合，司会者はあなたの扉とは別のハズレのドアを開く．
- あなたの選んだ扉 (A) がアタリだった場合，司会者は残りの扉 (B or C) のうち, 一方をランダムに開く．

あなたが A を選び，司会者が B はハズレですとヒントを示した．このとき

$$P(A) < 2P(C)$$

ならば，扉を変えた方が有利である．すなわち

$$P(A) < 2P(C) \Longrightarrow P(A|b) < P(C|b)$$

が成立する (市川 1998).

[9] ただし，この直感的理解は正しい理解・正確な理解とは厳密には言えません．なぜなら確率を《凝縮する》という比喩によって，事後確率を算出する過程を省略しているからです．実際，事前分布が一様分布でない時，このアナロジーは破綻します

証明. ベイズの定理より

$$P(A|b) < P(C|b)$$

は

$$\frac{P(b|A)P(A)}{P(b|A)P(A)+P(b|B)P(B)+P(b|C)P(C)} < \frac{P(b|C)P(C)}{P(b|A)P(A)+P(b|B)P(B)+P(b|C)P(C)}$$

と書けます．両辺の分母は同じだから，分子だけを比較して

$$P(b|A)P(A) < P(b|C)P(C)$$

であれば，扉を変更した方が当たり確率が高くなります．仮定より，$P(b|C) = 1$ だから

$$P(b|A)P(A) < P(C)$$

です．ところで $P(b|A)$ は A がアタリである時に，B がハズレだと告知する確率だが，司会者は仮定より B,C から扉を一枚ランダムに選ぶので（両方ともハズレだと分かっているのでどちらを選んでもよい),

$$P(b|A) = 1/2$$

と仮定するのが妥当です（したがってこの条件付き確率自体は $P(B), P(C)$ の具体的な値に影響を受けません）

以上の仮定のもと, 扉を C に変更した方が有利な条件は

$$\begin{aligned} P(b|A)P(A) &< P(b|C)P(C) \\ P(b|A)P(A) &< P(C) \\ \frac{1}{2}P(A) &< P(C) \\ P(A) &< 2P(C) \end{aligned}$$

です． □

例 1 (事前分布が偏っている場合)**.** 扉 A,B,C がアタリである確率をそれぞれ

$$P(A) = 65/100, P(B) = 2/100, P(C) = 33/100$$

とおく．あなたが A を選ぶと司会者は B がハズレだと示した．あなたは扉を C に変更すべきだろうか？

命題の教えに従えば，条件

$$\frac{65}{100} = P(A) < 2P(C) = \frac{66}{100}$$

は (ギリギリ) 成立するので，扉を変えるべきです．しかし $P(A) = 0.65$ は事前確率で最も大きく，$P(C) = 0.33$ よりもずっと大きい値です．また $P(B) = 0.02$ は極めて小さいので，それがハズレと分かったところで，たいしたヒントにもならないような気がします．

あなたは扉を変えるべきでしょうか？

ベイズの定理を用いて条件付確率を計算した結果は

$$P(C|b) = \frac{66}{131} > P(A|b) = \frac{65}{131}$$

です．この結果を直感で想像することはとても難しいでしょう．[10].

文献

市川伸一, 1998,『確率の理解を探る—3 囚人問題とその周辺 (認知科学モノグラフ 10)』共立出版.
河野敬雄, 1999,『確率概論』京都大学学術出版.
Rosenthal, Jeffrey S. (September 2005). "Monty Hall, Monty Fall, Monty Crawl". *Math Horizons*:5-7.
Selvin, Steve (February 1975a). "A problem in probability (letter to the editor)". *American Statistician* 29 (1): 67.
Selvin, Steve (August 1975b). "On the Monty Hall problem (letter to the editor)". *American Statistician* 29 (3): 134.

[10]雑学的にモンティ・ホール問題の答えを知っていることには，なんの価値もありません．もしこの問題に心底納得できない人は，自分の《わからなさ》を可能な限り維持しながら問題につきあってください．原理を理解せずに結論だけを鵜呑みにしてしまう「ものわかりのよさ」よりも,「わからなさ」と付き合い続ける「不器用さ」の方がはるかに大事なのです.